إجابة السؤال الأول :

(a) $\lim_{x \to 5} \frac{|x+2|-7}{x^2-25}$ $\qquad |x+2| = \begin{cases} x+2 & : x \geq -2 \\ -x-2 & : x < -2 \end{cases}$

$x \to 5 \quad \therefore x > -2 \qquad \therefore |x+2| = x+2$

$$\frac{|x+2|-7}{x^2-25} = \frac{x+2-7}{x^2-25} = \frac{x-5}{(x-5)(x+5)} = \frac{1}{x+5} \qquad : x \neq 5$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{|x+2|-7}{x^2-25} = \lim_{x \to 5} \frac{1}{x+5} \qquad : x \neq 5$$

$\lim_{x \to 5}(x+5) = 5+5 = 10 \quad < 10 \neq 0$ شرط المقام

$$\frac{\lim_{x \to 5} 1}{\lim_{x \to 5}(x+5)} = \frac{1}{10}$$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \qquad : x \neq 0$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2(1+\cos x)}{\sin^2 x} \qquad : x \neq 0$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \times (1+\cos x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \times \lim_{x \to 0}(1+\cos x) \qquad : x \neq 0$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \times (1+\cos x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \times \lim_{x \to 0}(1+\cos x) \qquad : x \neq 0$$

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

$$= \left(\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}\right)^2 \times \left[\lim_{x \to 0} 1 + \lim_{x \to 0} \cos x\right] = (1)^2 \times (1+1) = 1 \times 2 = 2$$

اجابة السؤال الثاني :

$$(a)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$\frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}=\frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}}=\frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}}$$

$$x\to\infty\quad\therefore\ |x|=x$$

$$=\frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}=\frac{3-\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}$$

شرط المقام	شرط الجذر
$\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}=1\quad:\ 1\neq 0$	$\lim_{x\to\infty}1-\frac{9}{x^2}=\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{9}{x^2}=1-0=1\ :\ 1>0$ $\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}=\sqrt{1}=1$

$$\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{5}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}(3)-\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}=3-0=3$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{5}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}=\frac{3}{1}=3$$

(b) لتكن الدالة $f(x)=|x^2-5x+6|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$

الحل

نفرض أن $h(x)=x^2-5x+6$, $g(\ )=|x|$

$$f(x)=(g\ o\ h)(x)$$

(1) نظرية $h(x)=x^2-5x+6$ متصلة عند $x=2$ لانها دالة كثيرة حدود

(2) $h(2)=2^2-5\times 2+6=0$

$g(x)=|x|$ دالة متصلة عند $x=0$

(3) نظرية أى أن g متصلة عند h(2)

من (3) , (2) ، (1) ينتج أن الدالة (g o h) متصلة عند x = 2

$\therefore f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ متصلة عن $x = 2$

إجابة السؤال الثالث :

$$(a)\ f(x) = \begin{cases} x + 3 & : x \le -1 \\ \dfrac{4}{x+3} & : x > -1 \end{cases}$$

عين مجال الدالة ثم ابحث اتصالها على مجالها

$D_f = (-\infty, -1] \cup (-1, \infty) = R$

نفرض أن $g(x) = x + 3$ $g(x)$ دالة كثيرة الحدود متصلة على R

$f(x) = g(x)\ \forall x \in (-\infty, -1]$ $\therefore$ f دالة متصلة على $(-\infty, -1]$ $\leftarrow$ (1)

نفرض أن $h(x) = \frac{4}{x+3}$, h دالة حدودية نسبية متصلة $\forall x \in R - \{-3\}$

$f(x) = g(x)\ \forall x \in (-1, \infty)$ $\therefore$ f دالة متصلة على $(-1, \infty)$ $\leftarrow$ (2)

ندرس اتصال الدالة f عن x = -1 من جهة اليمين

$f(-1) = -1 + 3 = 2$, $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{4}{x+3} = \frac{4}{-1+3} = 2$

$f(-1) = 2 = \lim_{x \to -1^+} f(x)$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند العدد 1 - من جهة اليمين $\leftarrow$ (3)

من (3) , (2) , (1) ينتج أن

الدالة f متصلة على (∞ , ∞ -) أي متصلة على مجالها R

تابع اجابة السؤال الثالث

(b) لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a & : \quad x<0 \\ 2 & : \quad x=0 \\ ax+b & : \quad x>0 \end{cases}$$

متصلة على مجالها أوجد قيمة الثابتين a , b

الحل

مجال الدالة f هو R

F دالة متصلة على مجالها ∴ f متصلة عن x = 0

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0) \rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2-a)=2 \qquad \therefore\ 0-a=2 \quad \rightarrow \quad -a=2 \quad \rightarrow \quad a=-2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2x+b)=2 \qquad \therefore -2\times 0+b=2 \quad \rightarrow \quad b=2$$

$$\therefore a=-2\ ,\quad b=2$$

اجابات البنود الموضوعية

1	**a**	b	c	d
2	**a**	b	c	d
3	a	**b**	c	d
4	a	b	c	**d**
5	a	b	c	**d**
6	**a**	b	c	d
7	a	**b**	c	d
8	**a**	b	c	d